Линейные уравнения с параметрами

Автор:
Чеснокова Ирина Владимировна
учитель математики
МОУ "СШ № 83
Центрального района Волгограда"

Линейные уравнения с параметрами

Известно, что в программе по математике для неспециализированных школ задачам с параметрами отводится незначительное место.

К задачам с параметрами, рассматриваемым в школьном курсе, относятся, например, задачи, в которых отыскивается решение линейных и квадратных уравнений в общем виде, исследуется количество их корней в зависимости от значений параметров.

Естественно, что такой небольшой класс задач не позволяет учащимся овладеть методами решения задач с параметрами. В результате, у учащихся возникает психологический барьер уже при «первом» знакомстве с параметрами - это неизвестное и известное, переменная и постоянная. Выход из сложившейся ситуации - включать задачи с параметрами в каждую тему.

- Для решения задач с параметрами требуется:

а) свободное владение навыками решения уравнений;
б) знание специфических преобразований, которые используются в уравнениях;
в) умение построить логическую цепочку рассуждений.

- Что дают задачи с параметрами:

а) отработку навыков решения уравнений;
б) повышают интеллектуальный уровень ученика и его логическое мышление;
в) формируют навыки исследовательской деятельности;
г) повышают интерес к математике.

Прежде чем ввести понятие «параметр», учащимся необходимо напомнить роль букв в алгебре. Обратить внимание ребят на то, что за буквой скрывается число.

Предложите учащимся задания, в которых надо выразить одну переменную через другую. К этим задачам надо возвращаться постоянно, особенно в 7-м классе, поскольку умение выражать одну переменную через другую очень пригодится при решении задач по физике, где требуется вначале составить буквенное выражение и только затем подставить числовые значения.

Пример №1.
1) Из формулы S=Vt выразить: а) V, через S и t; б) t, через S и V.
2) Из формулы P=2(a+b) выразить :а) a, через P и b; б) b, через P и a.
3) Из формулы S=ab выразить: а) a, через S и b; б) b, через S и a.
4) Из формулы V=abc выразить: а) a, через V, b и c; б) b, через V, a и c; в) c, через V, a и b.
При каких значениях переменных имеют смысл эти выражения (формулы)?

Пример №2.
Выразить x: а) ax = a-1; б) (a+2) x = a-1; в) a x = a -1.
Укажите, при каких значениях a имеет смысл полученное выражение.
Найдите значение x при a=2; a=3; a= -10.
Повторите на простых примерах, что такое уравнение, что значит решить уравнение. При решении уравнений типа 2x-2=-1;14x=-4; 3-3x=1 обратите внимание учащихся на то, что мы выразили неизвестное, которое надо найти, через числа.
Покажите, что в уравнение, помимо неизвестного, могут быть введены и другие буквы, и буквенные выражения. Например, ax=a-1, (a+2)x=a-1, (a+2)x=(a+2)-1, a x=a -1.
При этом, как всегда в алгебре, мы полагаем, что буквы могут принимать любые числовые значения. Например, задавая произвольно значения a для уравнения ax=a-1 получаем

при а=2 имеем 2х=2-1; при а=3 имеем 3х=3-1; при а=0 имеем 0х=0-1; при а=-4 имеем -4х=-4-1.

Пример №3.
Дано уравнение ах=5а-9.

Напишите уравнение, которое получится, если а=10; а=-2; $a = \frac{1}{6}$; а=0.

Пример №4.
Решить уравнение относительно х:
х+2=а+7.
Решение: х=а+5.
Переменную, которую надо найти, будем называть неизвестной, а переменную, через которую будем выражать искомую неизвестную, назовем параметром.

- Параметр -это переменная величина, которая в процессе решения уравнения (задачи) считают фиксированной и относительно которой проводится анализ полученного решения.
- Решить уравнение с параметром - это значит для каждого значения параметра найти значение неизвестной переменной, удовлетворяющее этому уравнению.

Заметим, что в нашем примере параметр а может принимать любые значения.
Ответ запишем так: при любом значении параметра а

х=а+5 .

Основное, что нужно усвоить при первом «знакомстве» с параметром, это необходимость осторожного обращения с фиксированным, но неизвестным числом. Необходимость аккуратного обращения с параметром хорошо видна в примерах, где замена параметра числом делает задачу банальной. К таким задачам, например, относятся задачи, в которых требуется сравнить два числа.

Пример №5.
Сравнить числа: а) а и 3а;
б) -а и 3а.
Решение:
а) естественно рассмотреть три случая:
если $a < 0$, то $a > 3a$; если $a = 0$, то $a = 3a$; если $a > 0$, то $a < 3a$;
б) естественно рассмотреть три случая:
если $a < 0$, то $-a > 3a$; если $a = 0$, то $-a = 3a$; если $a > 0$, то $-a < 3a$.

Пример №6. При каком значении параметра а х=2,5 является корнем уравнения х+2=а+7?
Решение.
Т.к. х= 2,5 – корень уравнения х+2=а+7, то при подстановке х= 2,5 в уравнение
получим верное равенство 2,5+2=а+7, откуда находим а =-2,5.
Ответ: при а=-2,5.

Пример №7. Имеет ли уравнение 3х+5 = 3х+а решение при а=1. Подберите значение а, при котором уравнение будет иметь корни.

Пример №8. Найдите множество корней уравнения ах = 4х+5
а) при а=4; б) при $a \neq 4$.
На простых примерах надо показать, что приемы, используемые для решения уравнений с параметрами, такие же, как и при решении уравнений, содержащих помимо неизвестной только числа.

Пример №9. Решить уравнение ax=1.

Решение. На первый взгляд представляется возможным сразу дать ответ: $x = \frac{1}{a}$.
Однако при a=0 данное уравнение решений не имеет и верный ответ записывается так:

если a=0, то нет решений; если a≠0, то $x = \frac{1}{a}$.

Пример №10. Найти все натуральные значения a, при которых корень уравнения (a-1)x=12 является

а) натуральным числом; б) неправильной дробью.

Решение:
a≠1, то так как иначе уравнение не имеет решений;

а) если a≠1, то $x = \frac{12}{a-1}$.
Перебором находим:
при a=13, x=1;при a=7, x=2;при a=5, x=3;при a=4, x=4;при a=3, x=6;при a=2, x=12.
Ответ: a є {13, 7, 5, 4, 3, 2}.

б) если a≠1, то $x = \frac{12}{a-1}$.
Перебором находим, что a є {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13}.

Пример №11. Решить уравнение |x|=|a|.

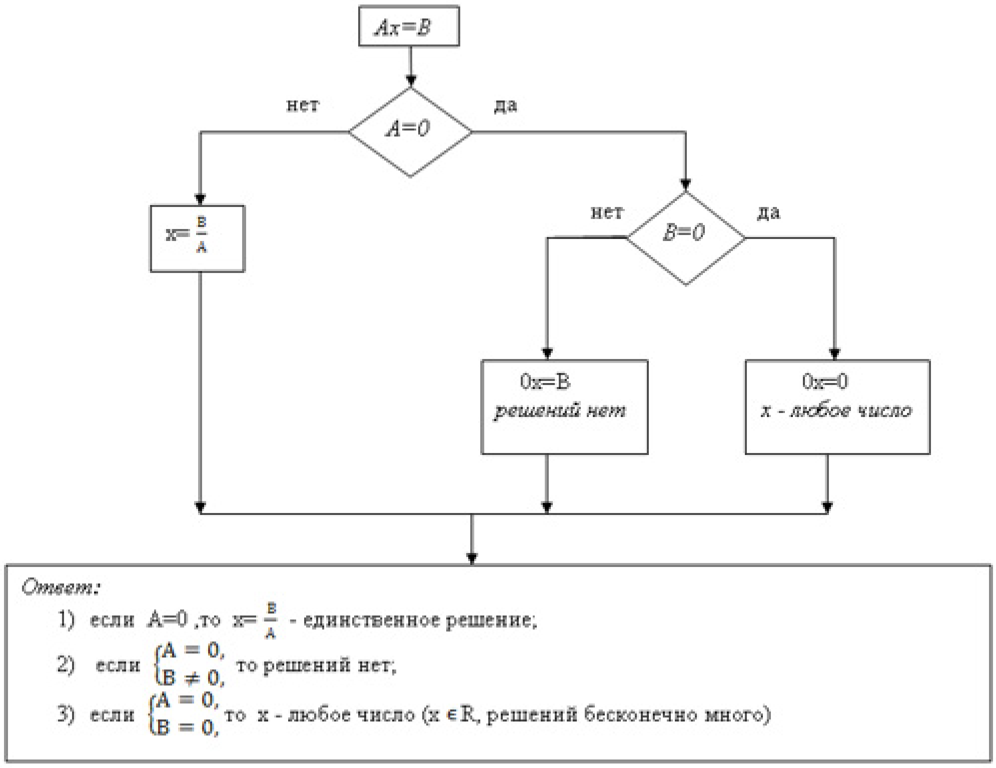
Пример №12. Решить уравнение ax+8=a.
Решение. Запишем уравнение в стандартном виде ax=a-8.
Основа правильного решения задач с параметрами состоит в грамотном разбиении области изменения параметра, к этому надо приучать путем подробного описания хода решения.
Итак, коэффициент при x равен a. Возникают два возможных случая:
коэффициент при x равен нулю и уравнение примет вид 0x=-8, полученное уравнение не имеет корней;
коэффициент при x не равен нулю, и мы имеем право разделить обе части уравнения на этот коэффициент: a≠0,

ax=a-8, $x = \frac{a-8}{a}$.
Ответ: при a=0, нет корней;
при a≠0, $x = \frac{a-8}{a}$.
Важно зафиксировать внимание учащихся на случае, когда коэффициент при x равен нулю, и рассматривать этот случай всегда первым, чтобы помочь учащимся избежать наиболее распространенной ошибки, когда этот случай теряют. Полезно обратить внимание учащихся на конструкцию записи ответа. В различных пособиях по математике встречаются две конструкции:
1.при a …, x …;
2.если a …, то x … .

Предложите учащимся решить самостоятельно (с последующей проверкой на доске) уравнение (a+2)x+2=a, где a – параметр.

Ответ: при a=-2, нет корней; при a≠-2, $x = \frac{a-2}{a+2}$.

Таким образом любое линейное уравнение с параметрами элементарными преобразованиями может быть приведено к виду Ax=B, где A и B – некоторые выражения, хотя бы одно из которых содержит параметр и исследуется по схеме:



<u>Пример № 13.</u> При каких значениях а уравнение (а2-1)х=а+1

а) не имеет решений; б) имеет бесконечное множество решений; в) имеет единственный корень.

Решение:

а) данное уравнение не имеет решений в том случае, если коэффициент при х равен нулю, а выражение, стоящее в правой части уравнения, не обращается в нуль, то есть $\begin{cases} a^2 - 1 = 0, \\ a + 1 \neq 0; \end{cases}$ откуда имеем $a=1$.

Т.о., при а=1 уравнение не имеет решений.

б) данное уравнение имеет бесконечное множество решений в том случае, если коэффициент при х равен нулю и выражение, стоящее в правой части уравнения, обращается в нуль, то есть $\begin{cases} a^2 - 1 = 0, \\ a + 1 = 0; \end{cases}$ откуда $a=-1$.

Т.о., при а=-1 уравнение имеет бесконечное множество решений.

в) уравнение имеет единственное решение, при а2-1≠0, то есть (а-1)(а+1)≠0, т.е. а≠±1.

Ответ:

Уравнение не имеет решений, при а=1.

Уравнение имеет бесконечное множество решений, при а=-1.

Уравнение имеет единственный корень, при а≠±1.

Пример №14. Решить уравнение для всех значений параметра

$$\left(\frac{3}{4}a-1\right)x+3a-4=0.$$

Решение: Запишем уравнение в стандартном виде

$$\left(\frac{3}{4}a-1\right)x=4-3a.$$

1) *Если* $\frac{3}{4}a-1=0,\ \frac{3}{4}a=1,\ a=\frac{4}{3}.$

Тогда уравнение имеет вид $0x=0$. Это равенство верно при любом x. Следовательно, решением уравнения будет все множество действительных чисел.

2) Если $\frac{3}{4}a-1\neq 0,\ a\neq\frac{4}{3}$

Тогда $x=\frac{4-3a}{\frac{3}{4}a-1}$, $x=-4$.

Ответ:

при $a=\frac{4}{3}$, *x – любое число;* при $a\neq\frac{4}{3}$, *x=-4.*

Пример №15. Предложить учащимся решить самостоятельно уравнение (а- параметр)

(а-1)х+2=а+1.

Решение. Запишем уравнение в стандартном виде

(а-1)х=а-1.

Если а-1=0, т.е. а=1, то уравнение примет вид 0х=0, т.е. х – любое число.

Если а-1≠0, т.е. а≠1, то х=1.

Ответ:

при а=1, х – любое число; при а≠1, х=1.

Пример №16. Решить уравнение $\frac{x}{a}+3=5-x.$

Решение. Преобразуем уравнение к стандартному виду

$$\frac{x}{a}+x=2;\ \left(\frac{1}{a}+1\right)x=2$$

1) Если $a=0$, то уравнение *не имеет смысла.*

2) Если $\begin{cases}\frac{1}{a}+1=0,\\ a\neq 0;\end{cases}$ т.е. при $a=-1$ уравнение примет вид $0x=2$, *решений нет.*

3) Если $\begin{cases}\frac{1}{a}+1\neq 0,\\ a\neq 0;\end{cases}$ т.е. при $a\neq -1$ и $a\neq 0$, *уравнение имеет единственный корень* $x=\frac{2a}{a+1}$.

Ответ:

при $a=0$ уравнение *не имеет смысла;* при $a=-1$ *решений нет;* при $a\neq -1$ и $a\neq 0$, $x=\frac{2a}{a+1}$.

Пример №17. Для всех значений параметра a решить уравнение

$$\frac{a}{a-1}x=a^2+a+1.$$

Решение. Если $a=1$, то уравнение не имеет смысла.

Если $a\neq 1$, то $a-1\neq 0$ и, умножив обе части уравнения на $a-1$, получим

$$ax=a^3-1.$$

1) Если $a=0$, то уравнение имеет вид $0x=-1$, откуда следует, что *решений нет.*

2) Если $a\neq 0$, то $x=\frac{a^3-1}{a}$.

Ответ: если $a=1$, то *уравнение не имеет смысла;* если $a=0$, то *решений нет;* если $a\neq 0$ *и* $a\neq 1$, то $x=\frac{a^3-1}{a}$.

Пример №18. Для всех значений параметров a и b решить уравнение

$$(a-2)x=4a+3b.$$

Решение.

1) $a=2$. Уравнение имеет вид $0x=8+3b$.

- *Если $8+3b\neq 0$, $b\neq -\frac{8}{3}$, то это равенство не выполняется ни при каком x, поэтому решений нет.*
- *Если $b=-\frac{8}{3}$, то уравнение примет вид $0x=0$, откуда следует: x- любое число.*

2) $a-2\neq 0$, $a\neq 2$. Тогда $x=\frac{4a+3b}{a-2}$.

Ответ: если $a=2$, $b\neq -\frac{8}{3}$, то решений нет; если $a=2$, $b=-\frac{8}{3}$, то x - любое число; если $a\neq 2$, b - любое, то $x=\frac{4a+3b}{a-2}$.

Пример №19. Сколько корней в зависимости от параметра а имеет уравнение

2 -1-х=а?

Решение. Преобразуем уравнение к виду 2|x| -1=x+a.

Рассмотрим функции f(x)=2|x| -1 и g(x,a)= x+a.

Графиком первой из них является ломаная (рис.1), графиком второй - семейство прямых, параллельных прямой у=х.

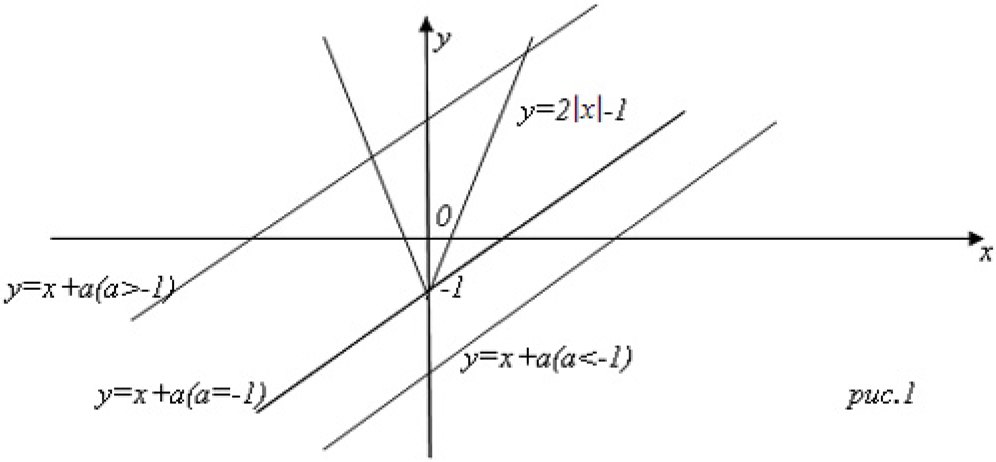


рис.1

Эти прямые пересекаются с осью ординат в точках с координатами (0;а). Очевидно, что если а будет возрастать от - , то впервые графики пересекутся тогда, когда прямая пройдет через вершину ломаной, т.е. через точку (0;-1), т.е. при а=-1. В этом случае уравнение имеет единственное решение. Если дальше увеличивать параметр а, то точек пересечения будет ровно две – с каждой из ветвей ломаной. В результате этого анализа получаем ответ.
Ответ: при а<-1 уравнение не имеет корней; при а=-1 уравнение имеет единственный корень; при а>-1 уравнение имеет два корня.

Как было сказано ранее, к уравнениям с параметрами надо возвращаться постоянно. Поэтому, на конец учебного года можно вынести уравнения:
1) (а-3)х=а2-9;
2) (3-2а)х=4а2-12а+9;
3) (а2-4)х=а2-5а+6;
4) (а2-1)х=а3+1

Решение.1) (а2-1)=0, а=±1.

При а=1 уравнение имеет вид 0х=2. Следовательно, решений нет.

При а=-1 уравнение имеет вид 0х=0. Следовательно, х- любое число.

2) $(a^2\text{-}1) \neq 0$, $a \neq \pm 1$. Тогда $x=\frac{a^3+1}{a^2-1}$, $x=\frac{a^2-a+1}{a-1}$.

Ответ: если $a=1$, то решений нет;

если $a=-1$, то x - любое число;

если $a \neq \pm 1$, то $x=\frac{a^2-a+1}{a-1}$.

Задачи для самостоятельного решения.

Для всех значений параметров а и в решите уравнения:
1. (5а+1)х+25а2+10а+1=0;
2. ах-а=х-1;
3. (а2-4)х=а2+а-2;
4. (а2-1)х-а2+2а-1=0;
5. (а-2в)х+а+в=3;
6. $\frac{a+1}{a+2}x=a^2-1$.

7. каких значениях параметра а уравнение а2(х-2)=х+а-3 имеет бесконечное множество решений?
8. каком значении параметра а корень уравнения х+3=2х-а будет отрицательным числом?
9. каждого значения параметра а определить число корней уравнения
|х-1| =а.
10. каждого значения параметра а определить число корней уравнения
|5х-3| =а.

Список литературы.

1. Крамор В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. – М.: Просвещение, 2007.

2. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач. Учеб. пособие для средней школы – М.: Просвещение, 2014.

3. Горнштейн Ш. Квадратные трехчлены и параметры. – Математика. -1999, №5.

4. Мещерякова Г.В. Задачи с параметрами, сводящиеся к квадратным уравнениям. – Математика в школе. №5, 2001.

5. Студенецкая В.Н., Сагателова Л.С.Математика.8-9 классы: сборник элективных курсов/авт.- сост. – Волгоград: Учитель, 2006.

6. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г. Алгебра. 9 класс. Дополнительные главы к школьному учебнику. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. - Москва: Просвещение, 2015.