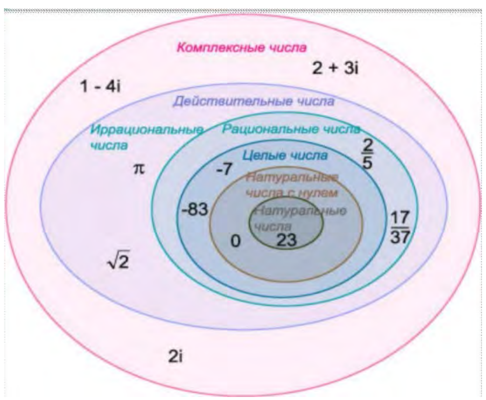
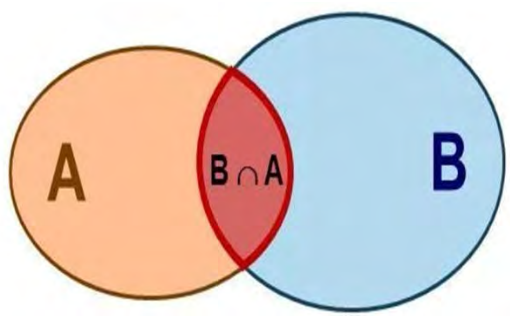
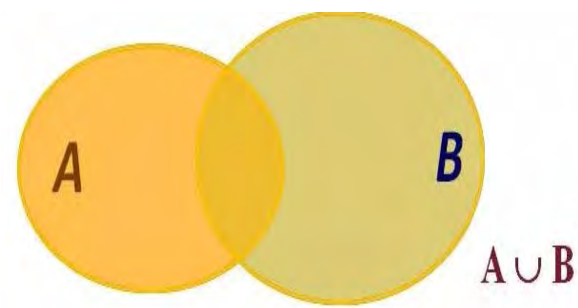
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОУВО Московской области
«Государственный гуманитарно-технологический университет»
Промышленно-экономический колледж

Тема урока:

Основные понятия теории множеств.







Автор: Савинова Лариса Николаевна,
преподаватель математических дисциплин

Цели и задачи урока:

- изучить основные понятия теории множеств;
- рассмотреть понятие «множество», «элемент множества», «подмножество», «булеан множества»;
- ввести классификацию множеств;
- описать способы задания множеств;
- показать изображение множества;
- научиться находить элементы и булеан множества, изображать множества с помощью диаграмм Эйлера-Венна;
- содействовать развитию математического мышления обучающихся и побуждать их к преодолению трудностей в процессе умственной деятельности;
- развивать культуру устной математической речи, чувство самоконтроля.

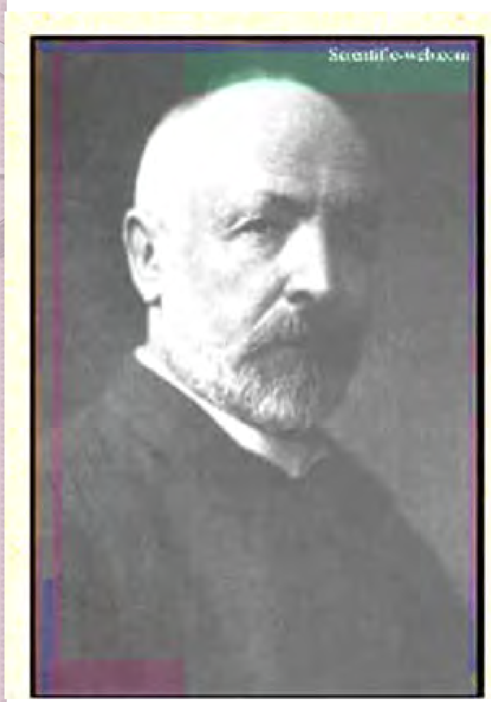
1. Основные понятия теории множеств

«Сегодня мы знаем, что, логически говоря, возможно вывести почти всю современную математику из единого источника – теории множеств»

Н. Бурбаки

Объектом исследования дискретной математики являются дискретные **множества** – совокупность, набор некоторых элементов. Поэтому начнем с самого общего глубоко абстрактного раздела этой науки – теории множеств и отношений, которая стала интенсивно развиваться с внедрением вычислительной техники. Простейшие представления о множествах впервые появились в связи с исследованиями в области карточных игр и возникновением комбинаторики и дискретной теории вероятностей.

1. Понятие множества



- При рассмотрении нескольких объектов, объединенных по какому-то признаку, употребляется слово «множество». Слова «семейство», «система», «набор», «совокупность» и т.п. – синонимы слова «множество».
- Одним из фундаментальных понятий математики является понятие множества. Оно было введено в математику немецким ученым Георгом Кантором (1845-1918) :

Множество – совокупность объектов, обладающих определенным свойством, объединенных в единое целое.

1. Понятие множества

- Примерами множеств могут служить:

1) множество студентов в группе;
2) совокупность тех из них, кто сдал экзамены без «3»;
3) семейство звезд Большой Медведицы;
4) совокупность молекул воды на Земле;
5) множество автомобилей, выпущенных заводом за год;
6) множество грибов в лесу;
7) система трех уравнений с тремя неизвестными;
8) множество всех целых чисел;
9) множество простых чисел;
10) множество точек, фигур и т.д.

- Множество может содержать конечное или бесконечное число объектов (элементов).

1. Понятие множества

- Объекты, из которых состоит множество, называются его элементами.
- Множество – это любая совокупность, объединение некоторых объектов произвольной природы, называемых элементами.
- Объединение объектов в множество означает существование правила, следуя которому любой рассматриваемый объект однозначно относится к данному множеству или не относится. Подобное правило чаще всего использует характерные свойства, признаки объекта, отличающие элементы данного множества. Например, множество четных чисел можно выделить среди натуральных чисел по признаку «делится на 2», а множество Z – из чисел по признаку «целостность».

1. Понятие множества

Виды множеств.

- Множество, состоящее из некоторого натурального числа элементов, называется **конечным множеством**.
- Если не существует такого числа, определяющего количество элементов в множестве, то такое множество называется **бесконечным.**

Например, множество арабских цифр, множество автомобилей, выпущенных заводом, – конечные множества, а множество всех простых, натуральных чисел – бесконечные множества.

- Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым множеством** и обозначается $\varnothing$. Его роль аналогична роли нуля в арифметике чисел.

Виды множеств

КОНЕЧНЫЕ	БЕСКОНЕЧНЫЕ	ПУСТЫЕ
2. Множество двузначных натуральных чисел	3. Множество действительных чисел.	1. Множество решений уравнения $x^2 + 1 = 0$.
5. Множество месяцев в году.	**ВЫВОД** Содержат бесконечно много элементов	4. Множество точек пересечения двух параллельных прямых.
ВЫВОД Содержат конечное число элементов	**ОБОЗНАЧЕНИЕ** {1, 2, 3, 4, 5, …}	**ВЫВОД** Не содержат ни одного элемента
ОБОЗНАЧЕНИЕ {1, 2, 3, 4, 5}		**ОБОЗНАЧЕНИЕ** $\varnothing$

1. Понятие множества

Записи множеств

- Множества обычно обозначаются большими латинскими буквами (A, B, C, X, Y…), а их элементы – малыми буквами: $a, b, c, x, y\ldots$
- Если a – элемент множества A, то пишут $a \in A$ и говорят «элемент *a принадлежит* множеству A».
- Если a не является элементом множества A, то пишут $a \notin A$ и говорят «элемент *a не принадлежит* множеству A».
- Если a_1, a_2, …, a_n – элементы, то запись $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ означает, что множество A состоит из элементов a_1, a_2, …, a_n. Аналогична запись $A=\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$.

1. Понятие множества

- Множество считается **заданным**, если или *перечислены* все его элементы, или *указано свойство*, которым обладают те и только те элементы, которые принадлежат данному множеству.
- Первый вариант будем записывать так: $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$, например $M = \{0, 1\}$.
- Второй вариант будем записывать так: $M = \{b \mid P(b)\}$. Читается так: «*M* состоит из тех (всех) элементов *b*, которые обладают признаком *P*.

Например, $M = \{n \mid n \in N, n<5\}$ означает: *M* составляют только те натуральные числа, что меньше 5.

- Само свойство *P* называют характеристическим.

PS: вертикальная черта выражает словесный оборот «которые», «таких, что». Довольно часто вместо неё используется двоеточие.

1. Понятие множества

- В качестве характеристического свойства может выступать указанная для этого свойства порождающая процедура, которая описывает способ получения элементов нового множества из уже полученных элементов или из других объектов. Тогда элементами множества считаются все объекты, которые могут быть получены с помощью этой процедуры.
- Например, множество M_{2^n}= $\{$1, 2, 4, 8, 16, 32, …$\}$ всех чисел, являющихся неотрицательными степенями числа 2, т.е. $\mathrm{M}_{2^n} = \{2^i \mid i \in Z, i \geq 0\}$.
- Запись $M = \{x \mid P(x)\}$ означает: множество М состоит из всех элементов x, обладающих признаком Р.

Например, запись $\mathrm{M} = \{\mathrm{x} | \mathrm{x}^3 + 3\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} = 0\}$ означает, что множество М содержит только корни уравнения, т.е. числа $\{$0, -1, -2$\}$.

1. Понятие множества

- Запись $Z = \{X||OX| \leq 4\}$ означает, что для любых X расстояние *OX* меньше или равно 4, т.е. множество всех точек, для которых расстояние до X не больше 4, есть шар с центром в точке O и радиусом R = 4.
- Запись A$= \{x|\mathrm{x} \geq 7,\ x \in N\}$ читается так: для любых натуральных x, начиная с 7.
- Если множество не содержит элементов, обладающих характеристическим признаком, то оно называется пустым и обозначается $\varnothing$.

  Например, множество целых решений неравенства

  5 < x < 6 является пустым: $\mathrm{K} = \{\mathrm{x}|x \in Z, 5 < x < 6\} = \emptyset$.
- Пустым будет множество действительных решений уравнений $x^2 + 25 = 0$ и $5^{2x-3} = -1$.
- Множество, не являющееся пустым, называется непустым.

Примеры задания множества

Множество всех чисел, являющихся неотрицательными степенями числа 2 можно задать:

а) перечислением элементов: $M_{2^n} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}$;

б) указанием характеристического свойства:

$$M_{2^n} = \{2^i \mid i \in Z, i \geq 0\};$$

в) с помощью порождающей процедуры по *индуктивным* правилам:

$$1 \in M_{2^n};$$

если $k \in M_{2^n}$, то $(2k) \in M_{2^n}$.

Упражнения

№ 1. Задать множество А, указав все его элементы:

a) $\text{A} = \{\text{x}|x \in N, -7 < x \leq 9\}$

b) $\text{A} = \{\text{x}|x \in N, -3 < x \leq -1\}$

c) $\text{A} = \{\text{x}|x \in Z, -7 < x \leq 2\}$

d) А$= \{\text{x}|\text{x}^2 - 5\text{x} + 6 = 0\}$

№ 2. Что означает запись:

a) $\text{B} = \{\text{x}||Ox| \leq 5\}$

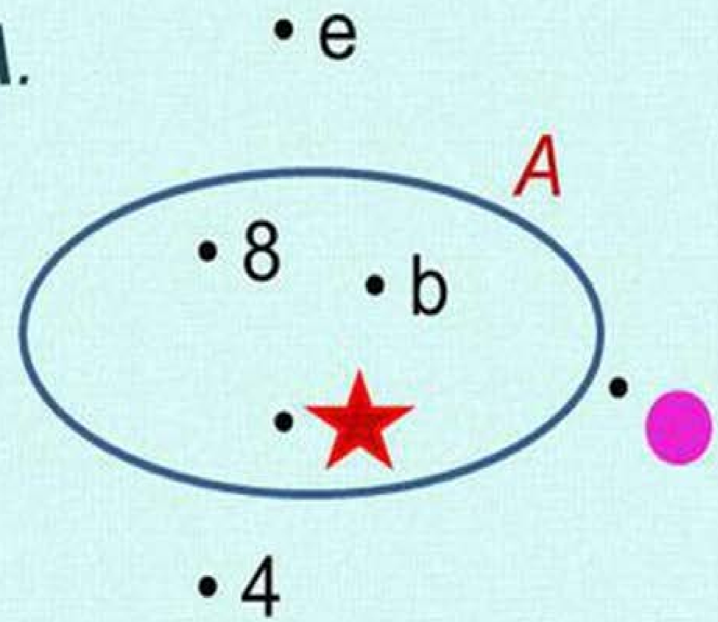
b) $\text{B} = \{\text{x}||Ox| \geq 2\}$

№ 3. Найти элементы множества А$= \{\text{x}|\text{x}^2 - \text{x} + 6 \leq 0\}$.

№ 4. Запишите множество всех натуральных чисел, меньших ста.

Пример.

На рисунке изображена диаграмма множества ***А.*** *Какие элементы* ***принадлежат*** *множеству* ***А****, а какие ему* ***не принадлежат****?*



2. Понятие «подмножество»

Пусть А и В – два множества.

Если А и В состоят из одних и тех же элементов, то говорят, что они совпадают, и пишут ***A=B*** (любой элемент *A* является элементом *B*, и наоборот).

Если в множестве *A* нет элементов, не принадлежащих *B* (т.е. каждый элемент *A* является элементом и *B*), то говорят, что «А содержится в В» или что «А является подмножеством множества В» и пишут

$$\mathbf{A \subset B}.$$

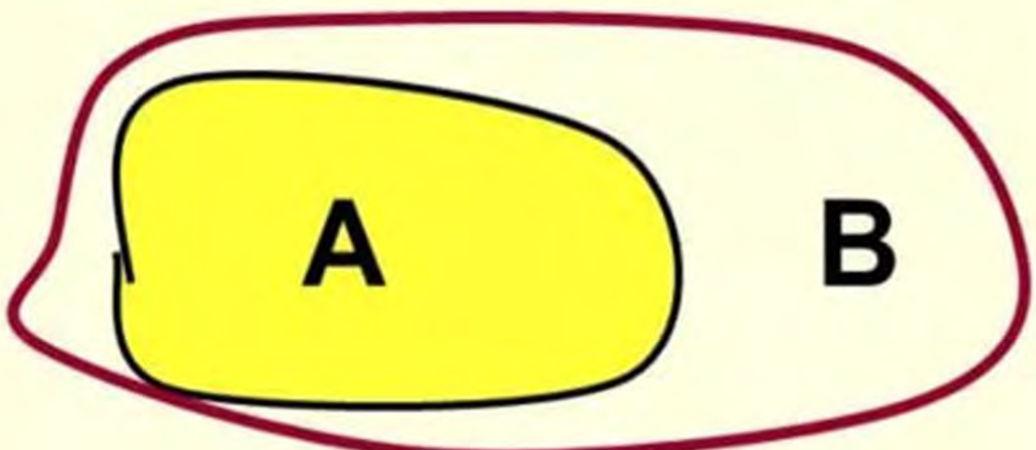
Пустое множество является подмножеством любого множества.

Например.

$$A = \{1,2,3\} \quad B = \{1,2,3,4,5\}$$

А- подмножество В

$$A \subset B$$



Универсальным называется множество U, состоящее из всех возможных элементов, обладающих данным признаком.

Если множество не содержит элементов, обладающих данным признаком, то оно называется **пустым** и обозначается $\varnothing$.

Равными называют два множества A и B, состоящие из одинаковых элементов: $A = B$.

Число элементов множества A называется **мощностью** множества и обозначается $|A|$ или $n(A)$.

Множество, элементами которого являются подмножества множества *M*, называется *семейством множества* M или *булеаном* этого множества и обозначается *B(M)*.

Мощность булеана множества *M* *вычисляется по формуле*

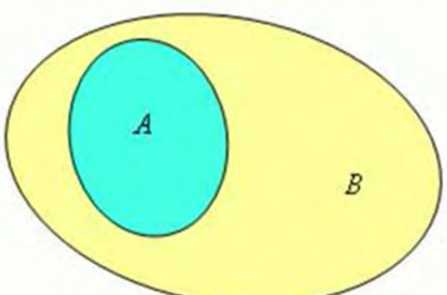
$$|B(M)| = 2^n,$$

где *n – это мощность множества M.*

Пример. $M = \{y, x, a\}, n = 3, |B(M)| = 2^3 = 8,$

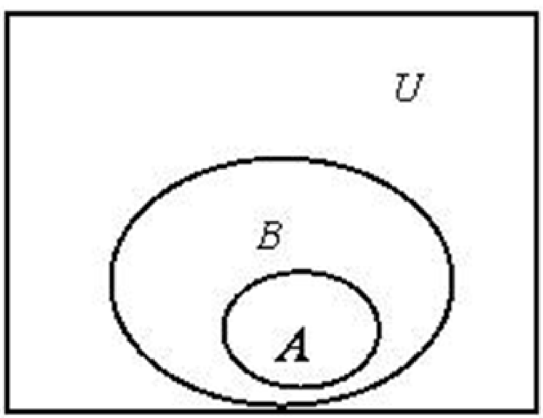
$$B(M) = \{\varnothing, \{y\}, \{x\}, \{a\}, \{y, x\}, \{x, a\}, \{y, a\}, \{y, x, a\}\}.$$

3. Изображение множеств



A – подмножество B

Изображение множеств в виде плоских фигур очень удобно для наглядного объяснения различных <u>операций над множествами.</u> Обычно множества при этом изображают в виде некоторых кругов. Такие круги называют кругами Эйлера в честь великого немецкого математика Леонарда Эйлера (1707 -1783), который долгое время работал в России.



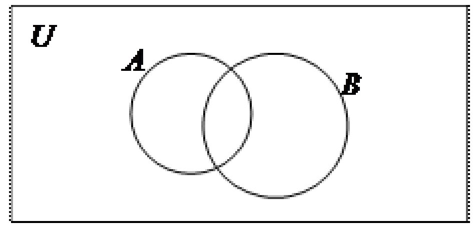
Джон Венн предложил использовать круги и прямоугольники. При этом универсум представляется множеством всех точек некоторого прямоугольника, а его подмножества – соответствующими кругами. В дальнейшем такие схемы стали называть **диаграммами Эйлера-Венна.**

Диаграмма Венна (или диаграмма Эйлера—Венна) — схематичное изображение всех возможных отношений (объединение, пересечение, разность, симметрическая разность) нескольких (часто — трёх) подмножеств универсального множества.

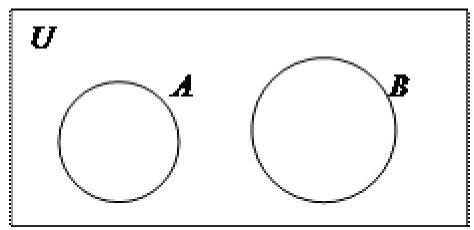
На диаграммах Венна универсальное множество U изображается множеством точек некоторого прямоугольника, в котором располагаются в виде кругов или других простых фигур все остальные рассматриваемые множества.

Для произвольных двух множеств А и В возможны 3 варианта отношений

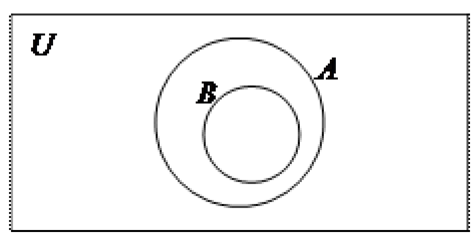
Вариант 1 – множества *A* и *B* имеют общие элементы:



Вариант 2 – множества *A* и *B* не имеют общих элементов:

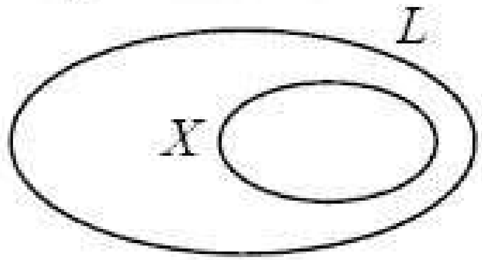


Вариант 3 – одно из множеств является собственным подмножеством другого:

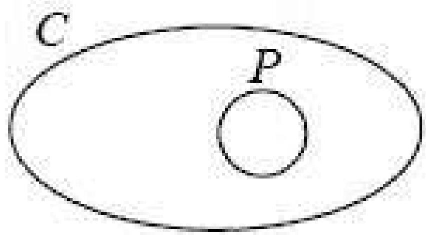


Пример.

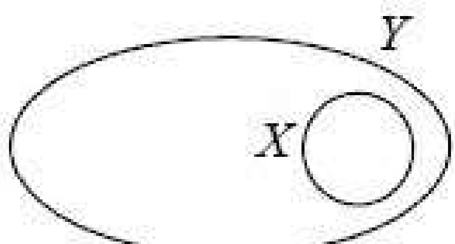
L — множество видов транспорта, X — множество видов воздушного транспорта: $X \subset L$.



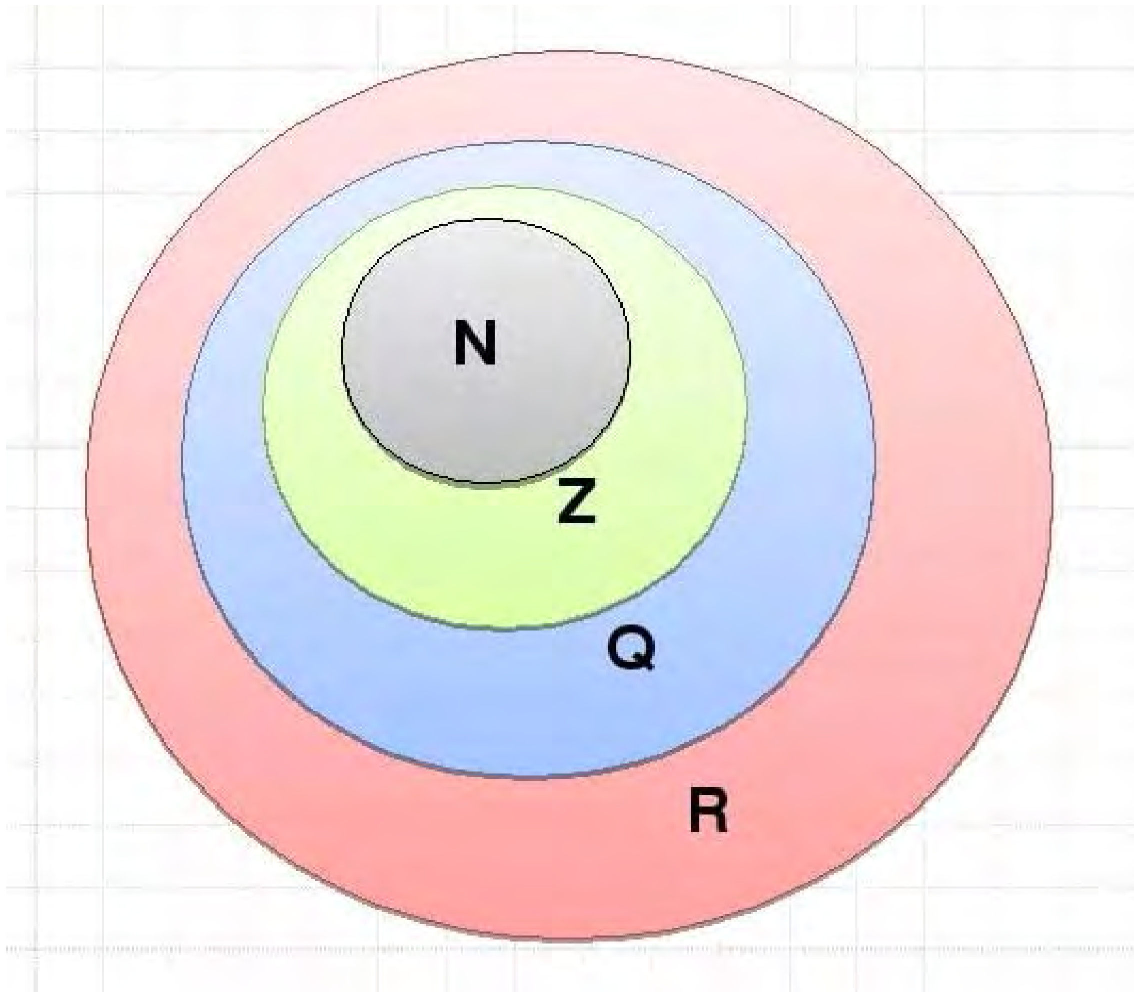
C – множество птиц, P – множество попугаев.



X – множество планет Солнечной системы, Y – множество планет Вселенной.

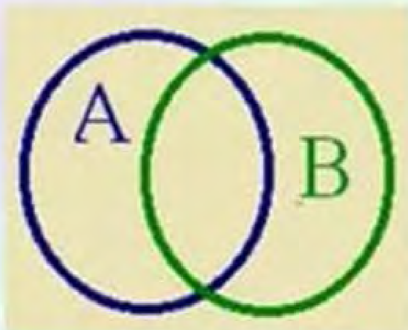


Пример. Изображение числовых множеств кругами Эйлера

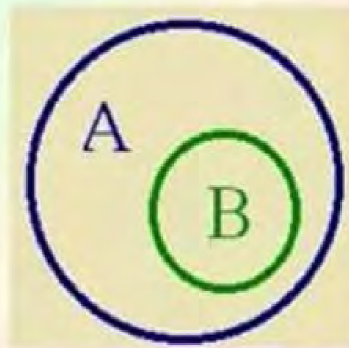


Примеры.

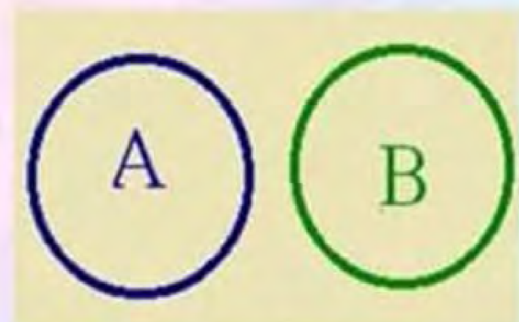
Индивидуальные отношения между заданными множествами изображают с помощью ***кругов Эйлера***.



$A = \{1, 4, 6\}$;
$B = \{1, 5, 8\}$;
Общий элемент – *1*
$A \cap B$



$A = \{1, 4, 6\}$;
$B = \{1, 6\}$;
$B \subseteq A$



$A = \{1, 4, 6\}$;
$C = \{3, 5, 8\}$;
Нет общих элементов ***A*** и ***B***.
$A \neq B$

Пример. Найдите все элементы множества и запишите его подмножества:

$$\boldsymbol{A = \{x | 0 < x \le 4 \text{ и } x \in N\}}$$

Элементы множества:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

Подмножества: $\emptyset, \{1, 2, 3, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}.$

$\{1, 2, 4\}, \{1,3,4\}, \{2, 3, 4\}$

$$\boldsymbol{B = \{x | x^2 - 6x + 9 = 0\}}$$

Элементы множества:

$$B = \{3\}$$

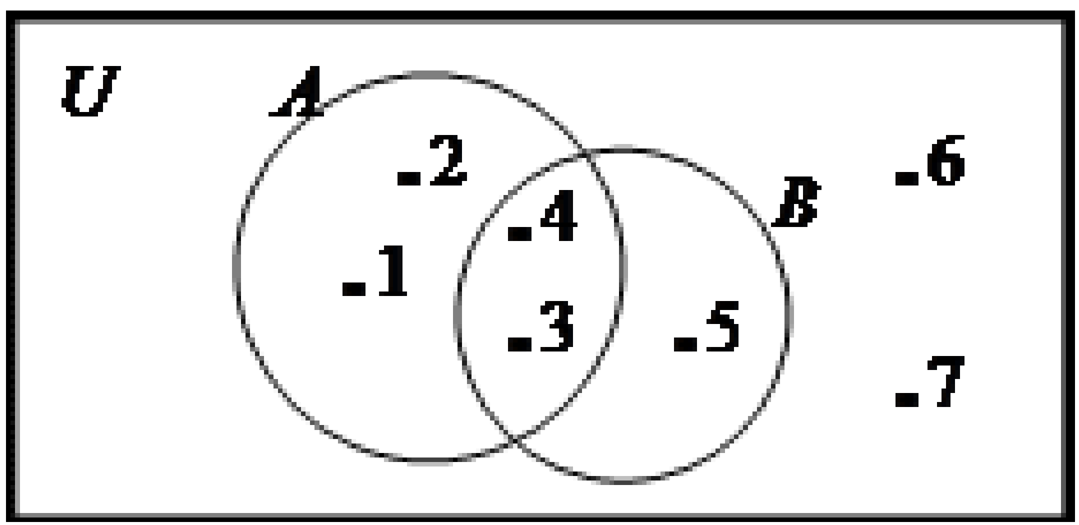
Подмножества: $\emptyset, \{3\}$

Пример.

- Задано универсальное множество

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ множества $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{3, 4, 5\}$. Изобразить множества с помощью кругов Эйлера-Венна.

- *Решение.* Изобразим данные множества с помощью кругов Эйлера-Венна



Пример.

Записать булеан множества $A=\{-5,10,9\}$.

Решение

Множество А содержит 3 элемента, т.е. мощность множества А равна 3, $|A|=3$. Следовательно, множество А имеет $2^3=8$ подмножеств, т.е. булеан множества А будет состоять из восьми элементов. Перечислим все подмножества множества А.

Итак, подмножества таковы:

$\emptyset,\{-5\},\{10\},\{9\},\{-5,10\},\{-5,9\},\{-10,9\},\{-5,10,9\}$

- Напомню, что подмножество $\{-5,10,9\}$ является несобственным, так как совпадает с множеством А. Все остальные подмножества – собственные. Все записанные выше подмножества являются элементами булеана множества А. Итак:

$P(A)=\{\emptyset,\{-5\},\{10\},\{9\},\{-5,10\},\{-5,9\},\{-10,9\},\{-5,10,9\}\}$.

Домашнее задание

№ 1. Перевести утверждение из словесной формы в символьную:

1) «элемент a не принадлежит множеству A»;
2) «множество осенних месяцев в году»;
3) «множество десяти первых простых чисел».
4) «множество A не содержит элементов»;
5) «множество натуральных чисел, меньших 10».

№ 2. Прочитать записи множеств. Найти элементы и мощность множеств.

1) $M = \{n \mid n \in N, n \leq 10\}$;

2) $B = \{x \mid |0x| \geq 3\}$

3) $M = \{x \mid x \in Z, -8 < x \leq 5\}$

4) $B = \{x \mid |0x| \leq 10\}$

№3. Отобразить с помощью диаграмм Эйлера-Венна следующие соотношения:

1) A – множество цветов,
B – множество роз,
C – множество берез.

2) A – множество простых чисел, меньших 30, B – множество четных чисел.

№ 4. Записать булеан множества.

1) $M = \{x \mid x^2 + 5x + 6 = 0\}$

2) $A = \{x \mid -x^2 + 9x - 18 \geq 0\}$