МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОУ ВО МО «Государственный гуманитарно-технологический университет»
Промышленно-экономический колледж

Урок «Логарифмы и их свойства. Основное логарифмическое тождество. Натуральные и десятичные логарифмы»

$\log_a x = b$, если $a^b = x$

$\log_a a^b = b$	$a^{\log_a x} = x$

Автор: Савинова Лариса Николаевна,
преподаватель математики
ПЭК ГГТУ
г.о. Орехово-Зуево,
Московская область,
Российская Федерация

Логарифмы и их свойства.
Основное логарифмическое тождество.
Натуральные и десятичные логарифмы.

Цели урока

Дидактическая цель:

- ввести понятие логарифма с произвольным основанием;
- сформировать навыки вычисления логарифмов по определению;
- овладеть знаниями и умениями использовать основное логарифмическое тождество, формулы логарифмирования и потенцирования, формулы перехода от одного основания к другому в процессе решения упражнений;
- дать понятие натурального и десятичного логарифма;
- Научиться вычислять логарифмы с помощью микрокалькулятора.

Воспитательная цель:

- развивать творческую активность, продуктивное мышление, навыки самоконтроля при вычислении логарифмов.

Основные знания и умения

Студенты должны

знать:

- определение логарифма числа;
- основное логарифмическое тождество;
- свойства логарифмов;
- определение натурального и десятичного логарифма;
- формулу перехода к новому основанию;

уметь:

- логарифмировать выражения по данному основанию;
- вычислять значения простейших логарифмических выражений, используя определение и свойства логарифма;
- решать простейшие логарифмические уравнения;
- вычислять логарифмы на микрокалькуляторе.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока.
II. Разбор ошибок практической работы.
III. Изучение нового материала.
IV. Закрепление изученного материала.
V. Подведение итогов занятия. Рефлексия.
VI. Домашнее задание.

III. Изучение нового материала

1. Определение логарифма

- Рассмотрим показательное уравнение

$$a^x = b, \quad \text{где} \quad a > 0 \text{ и } a \neq 1, \quad x \in R.$$

- При $b \leq 0$ это уравнение не имеет решений; при $b > 0$ показательное уравнение имеет единственный корень. Этот корень называют *логарифмом b по основанию a* и обозначают $log_a b$.

Определение.

- ***Логарифмом*** положительного числа *b* по основанию *a*, где $a > 0, a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести основание *a*, чтобы получить число *b*, т.е.

$$a^x = b; \quad x = log_a b, \quad \Rightarrow \quad a^{log_a b} = b$$

Формулу $\underline{a^{\log_a b} = b}$ (где $b > 0, a > 0, a \neq 1$) называют *основным логарифмическим тождеством.*

На определение логарифма возможны три типа упражнений:

- на определение логарифма по данному числу и данному основанию;
- определение основания логарифмирования по числу и логарифму;
- определение числа по логарифму и основанию.

Таблицы логарифмов

Первые таблицы логарифмов были составлены швейцарским математиком Бюрги 1590 году. Немного позднее таблицы логарифмов также составил шотландский ученый Непер. Непер брал за основание логарифма число, очень близкое к единице но меньшее, чем единица. Непер опубликовал свои таблицы в 1614, а Бюрги в 1620 году.

Позднее Непер и его сотрудник Бригс перевели первые таблицы Непера на новое основание — 10. Таблицы десятичных логарифмов были впервые опубликованы в 1624 году. Именно поэтому они также носят название Бригговы.

В России первые таблицы логарифмов были изданы в 1703 году

Примеры. Заполнить пропуски:

1. $log_2 8 = \ldots,\quad$ т.к. $2^{\ldots} = 8,\quad a = 2, b = 8$
2. $log_3 \frac{1}{9} = \ldots,\quad$ т.к. $3^{\ldots} = \frac{1}{9},\quad a = 3, b = \frac{1}{9}$
3. $log_7 7 = \ldots,\quad$ т.к. $7^{\ldots} = 7,\quad a = 7, b = 7$
4. $log_4 1 = \ldots,\quad$ т.к. $4^{\ldots} = 1,\quad a = 4, b = 1;$
5. $log_{\ldots} 16 = 4,\quad$ т.к. $\ldots^4 = 16;$
6. $log_{\ldots} \frac{1}{32} = -5,\quad$ т.к. $\ldots^{-5} = \frac{1}{32};$

Примеры. Заполнить пропуски:

7. $4^{\log_4 5} = \ldots;$

8. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 3} = \ldots;$

9. $5^{\log_{\ldots} 4} = 4$

10. $13^{\log_{13} \ldots} = \frac{3}{4}.$

Примеры.

11. Вычислить $\log_{64} 128 = ?$

$$\log_{64} 128 = x,$$

$$\text{по определению:} \quad 64^{x} = 128$$

$$2^{6x} = 2^{7}$$

$$6x = 7$$

$$x = \frac{7}{6}$$

$$\text{Ответ:} \ \log_{64} 128 = \frac{7}{6}.$$

Примеры.

12. $3^{-2\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^{-2} = 5^{-2} = 1/25;$

13. Решить уравнение

$$log_3(1-x) = 2$$

$$3^2 = 1 - x$$

$$\underline{x = -8}$$

2. Свойства логарифмов

- При работе с логарифмами применяются следующие их свойства, вытекающие из свойств показательной функции:
- При любом $a > 0$ $(a \neq 1)$ и любых положительных числах x и y выполнены равенства:

Свойства логарифмов:

1. $\underline{log_a 1 = 0},\quad$ т.к. $\quad a^0 = 1$

2. $\underline{log_a a = 1},\quad$ т.к. $\quad a^1 = a$

3. логарифм произведения равен сумме логарифмов:

$$\underline{log_a xy = log_a x + log_a y}$$

4. логарифм частного равен разности логарифмов:

$$\underline{log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y}$$

5. логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания этой степени:

$$\underline{log_a \tilde{o}^{ð} = ð \cdot log_a \tilde{o}},\quad \text{ãäå}\ ð \in R$$

- Основные свойства логарифмов широко применяются в ходе преобразований выражений, содержащих логарифмы. При этом используются *формулы перехода* от одного основания логарифма к другому основанию:

1. $$log_a b = \frac{log_c b}{log_c a},$$ где $b > 0, a > 0, a \neq 1, c \neq 1, c > 0.$

2. $$log_a b = \frac{1}{log_b a}$$

3. $$log_{1/a} b = -log_a b$$

4. $$log_{a^p} b = \frac{1}{p} log_a b,$$ $a > 0, a \neq 1, b > 0, p \neq 0.$

.

Примеры:

14. $\log_{12} 2 + \log_{12} 72 =$

15. $\log_2 15 - \log_2 \dfrac{15}{16} =$

16. $\log_{13} \sqrt[5]{169} =$

17. $\log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20 =$

18. $\dfrac{\log_3 8}{\log_3 16} =$

Примеры:

14. $log_{12} 2 + log_{12} 72 = log_{12}(2 \cdot 72) = log_{12} 144 = 2$

15. $\log_2 15 - \log_2 \frac{15}{16} = \log_2 \frac{15}{15/16} = \log_2 16 = 4$

16. $log_{13} \sqrt[5]{169} = log_{13} 169^{\frac{1}{5}} = log_{13} 13^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5} log_{13} 13 = \frac{2}{5}$

17. $log_8 12 - log_8 15 + log_8 20 = log_8\left(\frac{12 \cdot 20}{15}\right) = log_8 16 = \left| \begin{array}{l} 8^x = 16 \\ 2^{3x} = 2^4 \\ x = 4/3 \end{array} \right| = \frac{4}{3}$

18. $\frac{log_3 8}{log_3 16} = \frac{log_3 2^3}{log_3 2^4} = \frac{3 log_3 2}{4 log_3 2} = \frac{3}{4}$

3. Логарифмирование и потенцирование

- Действие нахождения логарифма числа называют *логарифмированием*.
- Если число x представлено алгебраическим выражением, содержащим числа a, b, c, …, то найти логарифм этого выражения – значит выразить логарифм числа x через логарифмы чисел a, b, c, …. Нахождение положительного числа по его логарифму называют *потенцированием*.

Примеры.

19. Прологарифмировать выражения:

а) $x = 2a^3b;$ б) $x = \sqrt{\frac{ab}{c^3}};$ в) $x = \sqrt{a \cdot \sqrt[3]{b}}$

Ответ. а) $\log x = \log 2 + 3\log a + \log b;$

б) $\log x = \frac{1}{2}(\log a + \log b - 3\log c);$

в) $\log x = \frac{1}{2}\log a + \frac{1}{6}\log b.$

20. Пропотенцировать выражения:

$$\text{а) } \log x = \frac{1}{3}\log a - \frac{1}{2}\log b;$$

$$\text{б) } \log x = \frac{1}{4}\log a + \frac{3}{4}\log b - \frac{2}{3}\log c.$$

Ответ.

$$\text{а) } x = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}; \quad \text{б) } x = \frac{\sqrt[4]{ab^3}}{\sqrt[3]{c^2}}.$$

4. Десятичные и натуральные логарифмы.

- ***Десятичным логарифмом числа*** называют логарифм этого числа по основанию 10 и пишут: $\underline{\log_{10} b = \lg b}$

- ***Натуральным логарифмом числа*** называют логарифм этого числа по основанию *е*, где $e = 2{,}7182818\ldots \approx 2{,}7$

– иррациональное число, и пишут:

$$\underline{\log_e b = \ln b}$$

- Натуральные и десятичные логарифмы связаны формулами

$$lg\,b = \frac{ln\,b}{ln10} = 0{,}434\,ln\,b, \qquad ln\,b = 2{,}3\,lg\,b,$$

где $lg\,e = \frac{1}{ln10}; \quad lg\,e = 0{,}434; \quad ln10 = 2{,}3.$

Вычисление логарифмов на микрокалькуляторе.

- Вычисление числа <u>*e*</u> на микрокалькуляторе проводится по программе:

  1 SHIFT e^x Ответ: 2,718281829.

- Вычисление числа *lg b* и *ln b* проводится по программе:

  b *lg* и *b* *ln* .

- *Например*, вычисляя *lg 13* и *ln 13*, набираем на микрокалькуляторе:

  13 *lg* Ответ: 1,113943352;

  13 *ln* Ответ: 2,564949358.

- Чтобы находить логарифмы чисел по любому основанию, достаточно знать значения только десятичных или только натуральных логарифмов. Для этого используется формула перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию

$$log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}, \quad \text{где } b > 0, a > 0, a \neq 1, c \neq 1, c > 0.$$

- Из этой формулы при *c* = 10 и *c* = *e* получаются формулы перехода к десятичным и натуральным логарифмам:

$$log_a b = \frac{lg\, b}{lg\, a}, \quad log_a b = \frac{ln\, b}{ln\, a}.$$

Пример.

С помощью микрокалькулятора вычислить

$$log_3 80 = \frac{lg 80}{lg 3} \quad .$$

- Запишем данный логарифм следующим образом:

$$log_3 80 = \frac{lg 80}{lg 3} \qquad \text{или} \qquad log_3 80 = \frac{ln 80}{ln 3}$$

- Вычисляем на микрокалькуляторе по программе:

80 *lg* / 3 *lg* = 3,988692535

80 *ln* / 3 *ln* = 3,988692535

IV. Закрепление материала

Ответьте на вопросы:

- Что называется логарифмом?
- Записать на доске основное логарифмическое тождество.
- Чему равен логарифм произведения?
- Чему равен логарифм частного?
- Чему равен логарифм степени?
- Почему $\log_a a = 1; \quad \log_a 1 = 0$?
- Запишите формулы перехода логарифма от одного основания к другому.
- Что такое десятичный логарифм и как он записывается?
- Что такое натуральный логарифм и как он записывается?

Вычислите устно:

а) $\log_2 16 = \ldots;$ б) $\log_2 64 = \ldots;$

в) $\log_2 2 = \ldots;$ г) $\log_2 1 = \ldots;$

д) $\log_2 \frac{1}{2} = \ldots;$ е) $\log_2 \frac{1}{8} = \ldots.;$

ж) $3^{\log_3 18} = \ldots;$ з) $3^{5\log_3 2} = \ldots.$

Упростить выражения, пользуясь основным логарифмическим тождеством:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{6\log_{\frac{1}{2}} 2} =$

б) $0{,}3^{2\log_{0,3} 6} =$

в) $7^{\frac{1}{2}\log_7 9} =$

г) $8^{\log_2 5} =$

д) $9^{\log_3 12} =$

е) $16^{\log_4 7} =$

ж) $0{,}125^{\log_{0,5} 7} =$

Упростить выражения, пользуясь основным логарифмическим тождеством:

$$\text{а)}\left(\frac{1}{2}\right)^{6\log_{\frac{1}{2}}2}=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}2}\right)^{6}=2^{6}=64;$$

Упростить выражения, пользуясь основным логарифмическим тождеством:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{6\log_{\frac{1}{2}} 2} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 2}\right)^6 = 2^6 = 64;$

б) $0{,}3^{2\log_{0,3} 6} = \left(0{,}3^{\log_{0,3} 6}\right)^2 = 6^2 = 36;$

Упростить выражения, пользуясь основным логарифмическим тождеством:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{6\log_{\frac{1}{2}} 2} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 2}\right)^{6} = 2^{6} = 64;$

б) $0{,}3^{2\log_{0,3} 6} = \left(0{,}3^{\log_{0,3} 6}\right)^{2} = 6^{2} = 36;$

в) $7^{\frac{1}{2}\log_{7} 9} = \left(7^{\log_{7} 9}\right)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3;$

Упростить выражения, пользуясь основным логарифмическим тождеством:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{6\log_{\frac{1}{2}} 2} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 2}\right)^{6} = 2^{6} = 64;$

б) $0{,}3^{2\log_{0,3} 6} = \left(0{,}3^{\log_{0,3} 6}\right)^{2} = 6^{2} = 36;$

в) $7^{\frac{1}{2}\log_{7} 9} = \left(7^{\log_{7} 9}\right)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3;$

г) $8^{\log_{2} 5} = 2^{3\log_{2} 5} = \left(2^{\log_{2} 5}\right)^{3} = 5^{3} = 125;$

Упростить выражения, пользуясь основным логарифмическим тождеством:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{6\log_{\frac{1}{2}}2}=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}2}\right)^{6}=2^{6}=64;$

б) $0{,}3^{2\log_{0,3}6}=\left(0{,}3^{\log_{0,3}6}\right)^{2}=6^{2}=36;$

в) $7^{\frac{1}{2}\log_{7}9}=\left(7^{\log_{7}9}\right)^{\frac{1}{2}}=9^{\frac{1}{2}}=3;$

г) $8^{\log_{2}5}=2^{3\log_{2}5}=\left(2^{\log_{2}5}\right)^{3}=5^{3}=125;$

д) $9^{\log_{3}12}=3^{2\log_{3}12}=\left(3^{\log_{3}12}\right)^{2}=12^{2}=144;$

Упростить выражения, пользуясь основным логарифмическим тождеством:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{6\log_{\frac{1}{2}}2} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}2}\right)^{6} = 2^{6} = 64;$

б) $0{,}3^{2\log_{0,3}6} = \left(0{,}3^{\log_{0,3}6}\right)^{2} = 6^{2} = 36;$

в) $7^{\frac{1}{2}\log_{7}9} = \left(7^{\log_{7}9}\right)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3;$

г) $8^{\log_{2}5} = 2^{3\log_{2}5} = \left(2^{\log_{2}5}\right)^{3} = 5^{3} = 125;$

д) $9^{\log_{3}12} = 3^{2\log_{3}12} = \left(3^{\log_{3}12}\right)^{2} = 12^{2} = 144;$

е) $16^{\log_{4}7} = 4^{2\log_{4}7} = \left(4^{\log_{4}7}\right)^{2} = 7^{2} = 49;$

Упростить выражения, пользуясь основным логарифмическим тождеством:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{6\log_{\frac{1}{2}} 2} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 2}\right)^6 = 2^6 = 64;$

б) $0{,}3^{2\log_{0,3} 6} = \left(0{,}3^{\log_{0,3} 6}\right)^2 = 6^2 = 36;$

в) $7^{\frac{1}{2}\log_7 9} = \left(7^{\log_7 9}\right)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3;$

г) $8^{\log_2 5} = 2^{3\log_2 5} = \left(2^{\log_2 5}\right)^3 = 5^3 = 125;$

д) $9^{\log_3 12} = 3^{2\log_3 12} = \left(3^{\log_3 12}\right)^2 = 12^2 = 144;$

е) $16^{\log_4 7} = 4^{2\log_4 7} = \left(4^{\log_4 7}\right)^2 = 7^2 = 49;$

ж) $0{,}125^{\log_{0,5} 7} = 0{,}5^{3\log_{0,5} 7} = \left(0{,}5^{\log_{0,5} 7}\right)^3 = 7^3 = 343.$

Найти число х по определению логарифма:

$\log_6 x = 3$	$\log_2(5 - x) = 3$	$\log_{\frac{1}{6}}(0{,}5 + x) = -1$
$6^3 = x$	$2^3 = 5 - x$	$\left(\frac{1}{6}\right)^{-1} = 0{,}5 + x$
$\underline{x = 216}$	$\underline{x = -3}$	$6 = 0{,}5 + x$
		$\underline{x = 5{,}5}$

V. Подведение итогов занятия

- На уроке изучили логарифмы и их свойства.
- Обобщили понятие степени с действительным показателем и закрепили навыки действий со степенями.
- Вывели формулы перехода логарифма от одного основания к другому.
- Студенты развивали умение быстро и правильно вычислять логарифмы «в уме» и с помощью микрокалькулятора.
- Студенты научились логарифмировать и потенцировать выражения.
- Закрепили умения вычислять логарифмические выражения, используя определение, свойства логарифма и формулы перехода.

V. Подведение итогов занятия

- Внимание студентов было обращено на приемы оформления, рациональную запись решения, на умение пользоваться математической символикой в процессе решения упражнений.
- На занятии воспитывались аккуратность, внимательность при решении упражнений, способности доводить любое учебное задание до конца, правильно оценивать результаты своей работы, усиливалось внимание к развитию творческого мышления и повышению интереса к предмету «математика».

VI. Домашнее задание

- Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред. проф. образования / М.И. Башмаков. – 3-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2017. – 256 с.: с. 37-38 № 1-3.
- Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: Задачник: учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования / М.И. Башмаков. – 3-е изд. стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2017. – 416 с.:

с. 24 3 2.1-А (14-21), № 2.1-Б (11-15).